Material N° 7 EVALUADO

Módulo: Matemática
Curso(s): 2° medios A – B – C
Kimelchefe: Marcelo Ozimica Pérez

Üy:		**Trokiñ:**	**Antü: ___/___/___**
Nivel de exigencia: 60 %	**Puntaje: 27 puntos**	**Puntaje obtenido:**	**Calificación:**

Objetivos priorizados:	OA 3 – OA 4
Objetivo de la guía:	Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función cuadrática.
Instrucciones:	- **Este material será calificado, la nota se obtendrá de la siguiente manera:** **Guía terminada y entregada 40% de la nota** **Comunicación y trabajo con el profesor 50% de la nota** **Autoevaluación (pauta de cotejo) 10% de la nota** - Lea comprensivamente cada parte de la guía. - Debe desarrollar las preguntas en su cuaderno o en la guía, de forma ordenada, limpia, con letra legible y sin faltas de ortografía. - Los estudiantes de los cursos 2°A – 2°B – 2°C deben sacar fotografías, procurando que cada fotografía tenga su identificación y la del módulo que está trabajando, luego enviarlas al whatsapp **+569 91792521 o al mail mozimicap@gmail.com** **- La fecha de entrega es hasta el 13 de agosto.**

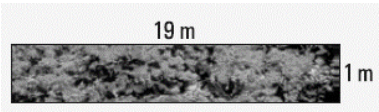
Comenzaremos a analizar la función cuadrática de acuerdo con el siguiente problema.

Problema:

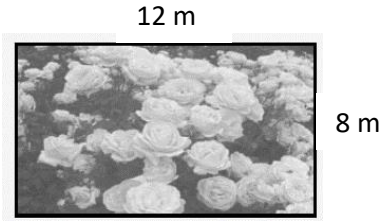
Se dispone de 40 metros de alambre para rodear un macetero rectangular en el que se va a realizar una plantación de rosales en un parque público. ¿Cuáles deben ser las medidas del macetero (largo y ancho) para que su superficie sea la mayor posible?

Solución:

Nota que dentro de la lectura del problema se habla que se tienen 40 metros de alambre que rodea el macetero rectangular, esto hace relación con el perímetro del rectángulo, observa que se pueden construir muchos rectángulos que cumplan con esa característica como lo muestran los siguientes ejemplos:



Macetero 1



Macetero 2

Ambos maceteros tienen un perímetro de 40 metros puesto que en el Macetero 1 sería $Perímetro_{Macetero\ 1} = 19 + 1 + 19 + 1 = 40$, y en el macetero 2 sería $Perímetro_{Macetero\ 2} = 12 + 8 + 12 + 8 = 40$.

Ahora, la pregunta del problema está orientada hacia cuál es la mayor superficie que se puede lograr con los rectángulos cuyo perímetro es de 40 m. Recuerda que la superficie tiene relación con el área del rectángulo, y para calcular el área se debe multiplicar el largo por el ancho, y como lo mostraremos a continuación el área tanto del Macetero 1 como en el Macetero 2 son distintas puesto que:

Macetero	**Cálculo del área**	**Superficie**
Macetero 1	$A_{M1} = 19 \cdot 1$	$A_{M1} = 19\, m^2$
Macetero 2	$A_{M2} = 12 \cdot 8$	$A_{M2} = 96\, m^2$

Como te puedes dar cuenta las superficies de ambos maceteros es considerablemente distinto, pero ¿es el Macetero 2 el que tiene mayor superficie de todos los rectángulos que pueda construir con un perímetro de 40 metros, o habrá otro que tenga una superficie mayor? ¿Cómo puedo saber cuáles son las medidas de los lados del macetero de tal forma que el área sea la máxima posible?

Para dar respuesta a estas interrogantes se pueden usar variadas estrategias que permiten analizar el problema, pero en esta ocasión analizaremos sólo 2.

Estrategia 1:

La primera estrategia a analizar es determinar todos los rectángulos posibles que puedo construir de tal manera que su perímetro es de 40 metros. En estricto rigor existen infinitos rectángulos que cumplen con esta condición, pero para simplificar el análisis revisaremos sólo los rectángulos cuya medida sea un número entero. Para hacer este procedimiento de forma ordenada usaremos una tabla en la que se muestra la medida del largo y ancho de cada rectángulo además de su superficie como se muestra a continuación:

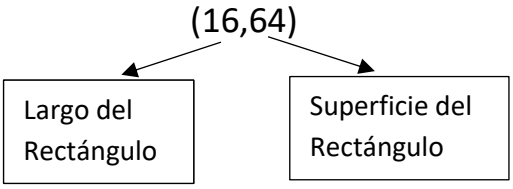
N° rectángulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Largo	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
Ancho	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Superficie $(\boldsymbol{m^2})$	**0**	**19**	**36**	**51**	**64**	**75**	**84**	**91**	**96**	**99**	**100**

Observa que se consideró en todos los casos que el perímetro de los rectángulos siempre es 40 metros como lo señala el problema puesto que si tomo el rectángulo 5 tenemos que $(16 \cdot 2) + (4 \cdot 2) = 40$ y si multiplico el largo por el ancho $16 \cdot 4 = 64$ su superficie resulta ser 64.

Nótese que de todos los rectángulos presentados en la tabla tienen distintas superficies siendo la mayor igual a 100 por lo que podríamos concluir que el macetero que necesito construir debe tener largo 10 y ancho 10. En este caso ustedes podrían decir que el rectángulo con mayor superficie resulta ser un cuadrado, pero en matemática los cuadrados también entran en la clasificación de rectángulo puesto que su definición no contradice las características de un rectángulo la cual es "lados opuestos paralelos y congruentes formando ángulos rectos en todos sus vértices".

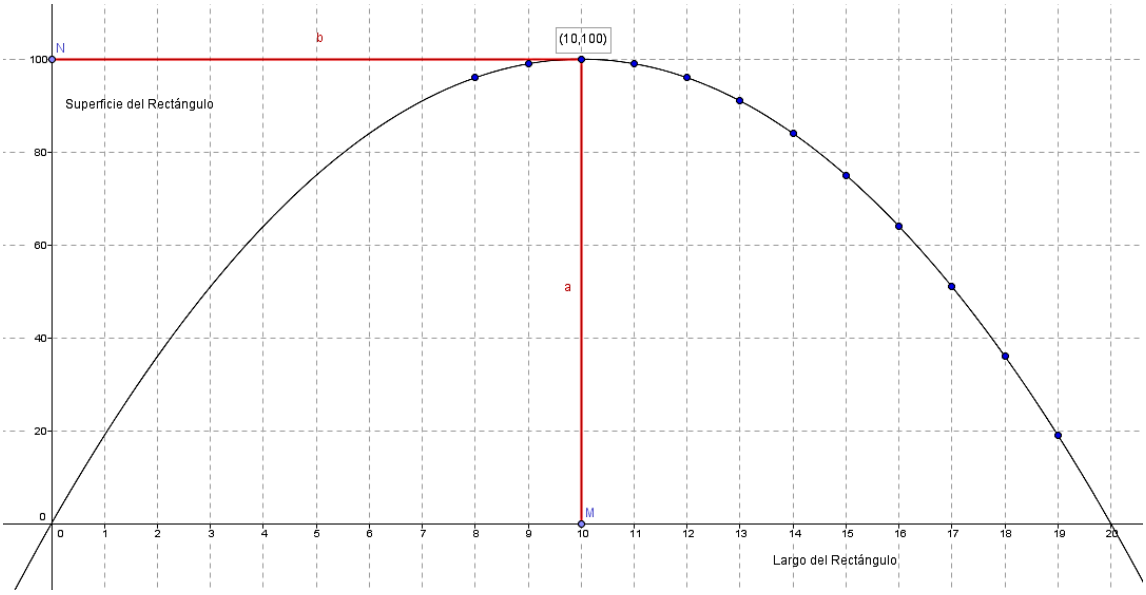
Pero ¿qué asegura que el rectángulo encontrado es el de mayor superficie? ¿Habrá otro rectángulo cuya superficie sea mayor? ¿Cómo puedo comprobar mi afirmación?

Para dar respuesta a estas interrogantes debemos realizar un gráfico en el que se relaciones la medida del largo (o ancho) con la superficie obtenida, de esta manera se generan los siguientes pares ordenados.



Pares Ordenados	(19,19)	(18,36)	(17,51)	(16,64)	(15,75)	(14,84)	(13,91)	(12,96)	(11,99)	(10,100)

Con estos pares ordenados podemos construir el siguiente gráfico.



Como puedes observar al realizar el gráfico de los puntos generados en la tabla anterior en el que se relacionaba el largo del rectángulo con la superficie del mismo se da cuenta que los puntos van subiendo hasta llegar a un punto máximo (10,100) y luego baja. Con esto afirmamos que efectivamente este es el punto máximo, por lo que el macetero que tenemos que debemos construir para que su área sea la máxima posible es de lado 10 metros de largo y 10 de ancho siendo su área máxima de 100 m^2.

Este método de resolver el problema es el más largo y tiene la deficiencia que se tiene analizar punto por punto, y si no se hace un análisis correcto de la situación el gráfico podría resultar confuso, pero a favor se tiene que no es necesario pasar por un tratamiento algebraico que en muchas ocasiones es un poco más complejo, puesto que el modelamiento se desarrolla mediante un análisis por tabla y gráfico.

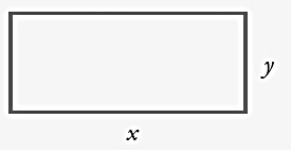
Estrategia 2:

Este tratamiento es algebraico y se debe hacer una representación de la situación como lo mostraremos a continuación:

Nuestro objetivo es determinar las dimensiones del largo (x) y ancho (y) del macetero para que éste tenga la mayor superficie posible a fin de plantar una gran cantidad de rosales.

Supondremos que la superficie del macetero está representada por la letra S, entonces

$Superficie\ del\ macetero = S$, además sabemos que nuestro macetero tiene largo "x" y ancho igual a "y", en esta oportunidad asignamos letras a las medidas del rectángulo, puesto que no sabemos qué medida tienen.



También sabemos que para calcular la superficie se debe multiplicar el largo por el ancho, entonces se tiene la siguiente relación,

$$S = x \cdot y \qquad \text{(Ecuación 1)}$$

Por el enunciado del problema sabemos que al sumar sus lados ésta debe ser igual a cuarenta, entonces podemos generar una segunda ecuación:

$x + x + y + y = 40$	Suman los términos semejantes
$2x + 2y = 40$	Divide por 2 toda la ecuación
$\frac{2}{2}x + \frac{2}{2}y = \frac{40}{2}$	Realizamos la división en cada término de la ecuación
$x + y = 20$	Despejamos el ancho y de la ecuación pasando restando el largo x.
$y = 20 - x$	Ecuación 2.

Reemplazamos la Ecuación 2, en la Ecuación 1.

$$S = x \cdot y$$

$$S = x \cdot (20 - x)$$

$$S = x \cdot (20 - x)$$

Multiplicamos el x por 20, y x por -x

$$S = 20x - x^2$$

x por 20 es 20x, y x por –x es $-x^2$

Por lo tanto, la función que modela la situación problemática planteada es

$\boldsymbol{S = 20x - x^2}$**, S es la superficie del rectángulo y x es el largo del rectángulo.**

¿Cómo funciona la expresión antes encontrada?, ahora veremos cómo funciona lo anterior. Si por ejemplo el largo del rectángulo es 14, entonces reemplazamos el valor 14 en donde se encuentre la x, quedando de la siguiente manera:

$$S = 20x - x^2$$

$$S = 20 \cdot 14 - 14^2$$

$$S = 280 - 196$$

$$S = 84$$

Si observas la tabla construida en la estrategia 1, podrás observar que cuando el largo es 14 la superficie es igual a 84. Esto quiere decir que hemos logrado modelar (en este caso es un modelo algebraico) la situación problemática mediante una función. Nótese que la función construida ($S = 20x - x^2$) la variable x está elevada a 2. **Cuando en una función cuando la variable está elevada a algún exponente entero se dice que estamos en presencia de la función potencia. En este caso particular resultó ser una función cuadrática que es un caso particular de la función potencia.**

Considera que con esta estrategia no basta con encontrar el modelo algebraico puesto que hasta el momento no hemos encontrado las medidas del rectángulo de tal forma que éste tenga área máxima. Para saber lo anterior necesitamos construir un gráfico de acuerdo a una tabla de valores. Hoy en día se usan softwares que nos permiten graficar dichas funciones, como por ejemplo Geogebra, en el que sólo debes ingresar la función y luego es el computador el que construye la gráfica. Si tuviera que graficar esta función resultará ser la misma que la mostrada en la estrategia 1, por lo que no se hará el procedimiento para graficar, pero señalaremos que cuando se tiene la gráfica debes observar el punto más alto de la gráfica (o el punto más bajo en el caso que el problema pregunte por un mínimo) y obtener los puntos.

Ahora practica tú.

Actividad

Resuelve el siguiente problema, recuerda que el siguiente problema es evaluado y corresponderá a una nota sumativa, la que se calculará de la siguiente manera:

Situación a evaluar	Porcentaje
Entrega del ejercicio completo por medio de fotos que son envidas al mail o whatsapp del profesor.	40%
Preguntas realizadas al profesor por medio de whatsapp para dar respuesta al problema.	50%
Autoevaluación.	10%

1. **Se dispone de 20 metros de alambre para rodear un macetero rectangular en el que se va a realizar una plantación de cilantros en un invernadero. De acuerdo a la situación anterior responde:**

a) Indica las medidas del largo y ancho de **dos** posibles rectángulos que cumplan con la condición que su perímetro sea 20 metros (4 ptos.).

b) Calcula la superficie de los rectángulos creados anteriormente (2 ptos.).

c) Construye una tabla con todos los posibles valores enteros de largo y ancho y su respectiva superficie, así como se mostró en el ejemplo de la estrategia 1 (5 ptos.).

d) Construye una tabla con los pares ordenados en el que se relacione el largo del rectángulo con la superficie. (guíate por ejemplo mostrado en la estrategia 1) (5 ptos.)

e) Con los pares ordenados obtenidos anteriormente construye un gráfico, así como se mostró en el ejemplo de la estrategia 1. (4 ptos.)

f) Concluye cuáles deben ser las medidas del macetero (largo y ancho) que permiten determinar la mayor área posible para plantar la mayor cantidad de plantas de cilantro. (2 ptos.)

g) Construye una fórmula o modelo algebraico del problema, así como se mostró en el ejemplo de la estrategia 2. (5 ptos.)

EVALUÁNDOME

Marca con una X la opción que corresponde según tu desempeño, recuerda que esta autoevaluación es considerada con un 10% de la calificación final de este trabajo.

Criterio	**Necesito mejorar** **1**	**Bien** **2**	**Super** **3**
1. Construyo dos rectángulos que cumplen con la condición dada (pregunta 1 a).			
2. Calculo la superficie de cada rectángulo (pregunta 1 b).			
3. Construyo una tabla de valores en el que se relacione el largo y el ancho del rectángulo con su respectiva superficie considerando la restricción de un perímetro de 20 m (pregunta 1 c).			
4. Organizo los datos en una tabla en el que aparezca el par ordenado que relaciona el largo del rectángulo que su respectiva superficie (pregunta 1 d).			
5. Realizo una gráfica usando los pares ordenados (pregunta 1 e).			
6. Determino las medidas del rectángulo de tal manera que se obtenga la mayor superficie posible (Pregunta 1 f).			
7. Determino la fórmula que modela la situación planteada (pregunta 1 g).			